06118

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

සංයුක්ත ගණිතය	II
இணைந்த கணிதம்	II
Combined Mathematics	II

10 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (*a*) P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට සිරස්ව උඩු අතට u m s^{-1} ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ තත්පර 4 කට පසුව A ලක්ෂ්‍යයක් වෙත ළඟා වන අතර, තවත් තත්පර 2 කට පසුව නැවත A වෙත පැමිණෙයි. P අංශුව දෙවනවරට A හි ඇති මොහොතේදී තවත් Q අංශුවක් O හි සිට සිරස්ව උඩු අතට එම u m s^{-1} ප්‍රවේගයෙන්ම ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එකම රූපසටහනක, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

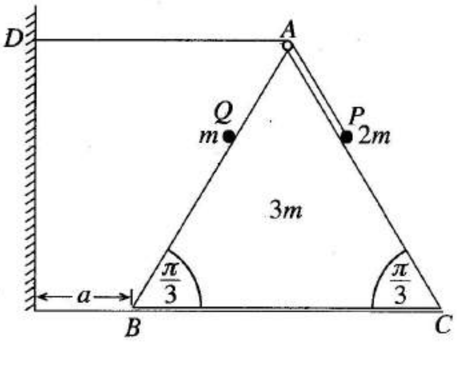
ඒ නයින්, g ඇසුරෙන් u හි අගය ද OA හි උස ද, P සමග ගැටීමට Q ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

(*b*) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතකදී, S වලින් d km දුරක් නැගෙනහිරින් P බෝට්ටුවක් පිහිටන අතර S වලින් $\sqrt{3}\,d$ km දුරක් දකුණෙන් වෙනත් Q බෝට්ටුවක් පිහිටයි. P බෝට්ටුව, පොළොවට සාපේක්ෂව $2u$ km h^{-1} ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක, S අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර Q බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $3u$ km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක P අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි.

(i) P බෝට්ටුවට, S නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{\sqrt{3}\,u}$ h බව ද

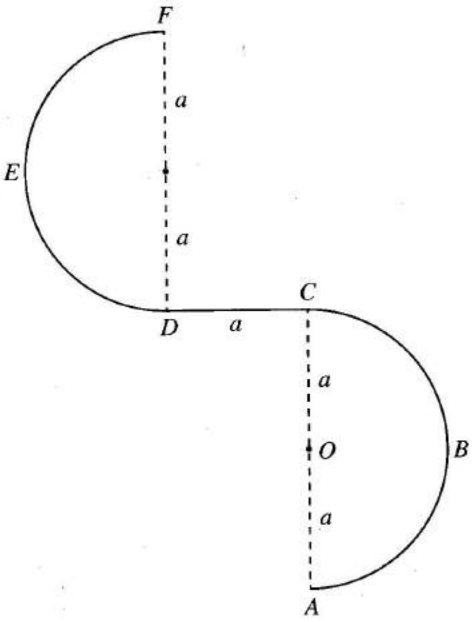
(ii) Q බෝට්ටුව P බෝට්ටුව අල්ලා ගැනීමට පෙර P බෝට්ටුව S නැව අල්ලා ගන්නා බව ද පෙන්වන්න.

12. (*a*) රූපයෙහි ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය, $AB = BC = AC = 6a$ ද වන, BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා AC රේඛා, ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි කුඤ්ඤයෙහි B ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට a දුරකින් වූ සිරස් බිත්තිය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හි සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන දිග $5a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් AC මත තැබූ ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර බිත්තිය මත වූ අචල D ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් AB මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $AP = AQ = a$ ලෙස ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය බිත්තියෙහි ගැටෙන මොහොතෙහිදී කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව Q හි ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



(*b*) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $ABCDEF$ තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස, කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. CD කොටස, දිග a වූ තුනී **රළු** තිරස් කම්බියක් වේ. DEF කොටස ද අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. AC හා DF විෂ්කම්භ සිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබලුවක් A හි තබා තිරස්ව $u\left(>3\sqrt{ag}\right)$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි. පබලුවෙහි C සිට D දක්වා චලිතය තුළ පබලුව මත කම්බිය මගින් ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයේ විශාලත්වය $\frac{1}{2}mg$ බව දී ඇත. P පබලුවෙහි A සිට C දක්වා චලිතය තුළ $\overrightarrow{OA}$ සමග θ $(0 \le \theta \le \pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට එහි v වේගය $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

F හිදී කම්බිය හැරයාමට මොහොතකට පෙර P පබලුවේ w වේගය $w^2 = u^2 - 9ag$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේදී කම්බිය මගින් P පබලුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

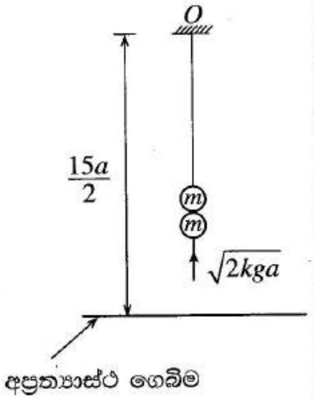


13. ස්වභාවික දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට $5a$ දුරක් පහළින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ස්කන්ධය m වූ වෙනත් Q අංශුවක් සිරස්ව ඉහළට ගමන් කර P සමග ගැටී හාවී R සංයුක්ත අංශුවක් සාදයි. P අංශුව සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර Q අංශුවේ වේගය $\sqrt{2kga}$ වේ. R චලිතවීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය සොයන්න. තන්තුව නොබුරුල්ව ඇතිව පසුව සිදුවන චලිතයේදී R සංයුක්ත අංශුවට O සිට දුර වන x යන්න $\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න. $X = x - 6a$ ලෙස ලියමින්, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ වේ.

ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය ද, $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් c විස්තාරය ද සොයන්න.

$k > 3$ නම් තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.



දැන්, $k = 8$ යැයි ගනිමු. P හා Q අංශු හාවූ මොහොතේ සිට O ලක්ෂ්‍යයට $\frac{15}{2}a$ දුරක් පහළින් වූ **අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමක** ගැටීමට R සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය සොයන්න.

R සංයුක්ත අංශුව ගෙබිම සමග ගැටුණු පසු ළඟා වන උපරිම උස ද සොයන්න.

14. (*a*) **a** හා **b** ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික යැයි ද $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු.

$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ නම්, $\lambda = 0$ හා $\mu = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ද වේ. AE (දික්කළ) හා BC රේඛා F හි දී හමුවේ. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ හා $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන් $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ වන්නේ ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ.

ACF ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, α හා β හි අගයන් සොයන්න.

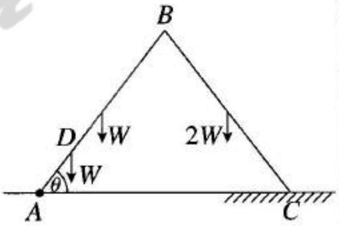
(*b*) ABC යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D, E, F යනු පිළිවෙළින් AB, BC හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. විශාලත්ව $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P$ හා αP වූ බල පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}$ හා $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියාකරයි. මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය, $\overrightarrow{AC}$ ට සමාන්තරව ක්‍රියාකරන බව දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.

බල පද්ධතිය, A හරහා ක්‍රියාකරන විශාලත්වය R වූ තනි බලයකට හා විශාලත්වය G වූ යුග්මයක් සමගින් තුල්‍ය වේ. R හා G හි අගයන් සොයන්න.

මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව ලියා දක්වා සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A හි සිට ඇති දුර සොයන්න.

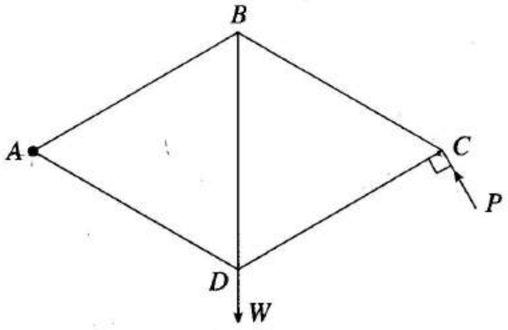
දැන්, විශාලත්වය H වූ යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. මෙම අලුත් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය B ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි. H හි අගය හා මෙම යුග්මය ක්‍රියාකරන අත සොයන්න.

15. (*a*) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B අන්තයේදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬුවල බර පිළිවෙළින් W හා $2W$ වේ. A කෙළවර තිරස් ගෙබිමක් මත අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. $AD = \dfrac{a}{2}$ වන පරිදි AB දණ්ඩ මත වූ D ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ $B\hat{A}C = \theta$ ද BC දණ්ඩේ C කෙළවර ඉහත තිරස් ගෙබිමෙහි රළු කොටසක ද තිබෙන පරිදි ය. BC දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. $\cot\theta \le \dfrac{15}{7}\mu$ බව පෙන්වන්න.



CB මගින් AB මත B සන්ධියෙහි දී ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

(*b*) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර සිරස් තලයක BD සිරස්ව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට C සන්ධියෙහි දී CD දණ්ඩට ලම්බව රූපයෙහි පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



(i) P හි අගය සොයන්න.

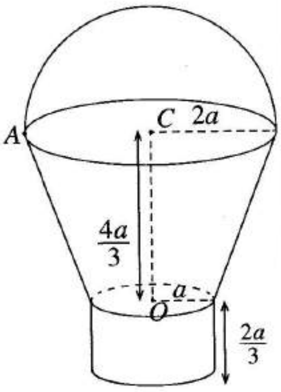
(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් ඒවා සොයන්න.

16. (i) අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයෙන් යුත් තුනී ඒකාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද,

(ii) උස h වූ ඒකාකාර කුහර ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\dfrac{1}{3}h$ දුරකින් ද,

පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් $2a$ හා a වූ ද උස $\dfrac{4a}{3}$ වූ ද කුහර ඍජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලකට, පහත දැක්වෙන කොටස් එක එකක් මෙම කබොල හමුවන ස්ථානවලදී දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන් බාල්දියක් සාදා ඇත.

- අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර තුනී වෘත්තාකාර තැටියක්,
- අරය a හා උස $\dfrac{2a}{3}$ වූ කුහර ඍජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලක්,
- අරය $2a$ හා කේන්ද්‍රය C වූ අර්ධ වෘත්තයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කම්බියක්

ඡින්නකයේ, තැටියේ හා සිලින්ඩරයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද කම්බියේ ඒකක දිගක ස්කන්ධය $11a\sigma$ ද වේ.

බාල්දියෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $(10\pi + 27)\dfrac{a}{9\pi}$ බව පෙන්වන්න.

කම්බිය, ඡින්නකයේ උඩත් ගැටිය හමුවන A ලක්ෂ්‍යයෙන් බාල්දිය සිරස් තන්තුවකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබූ විට සමතුලිත පිහිටීමේදී OC යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

17. (a) A හා B සර්වසම පෙට්ටි එක එකක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම බෝල 10 බැගින් අඩංගු වේ. A පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 6 ක් ද රතු පාට බෝල 4 ක් ද, B පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 8 ක් ද රතු පාට බෝල 2 ක් ද අඩංගු වේ. පෙට්ටියක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන, එම පෙට්ටියෙන් එකකට පසු අනෙක ලෙස, ප්‍රතිස්ථාපන රහිතව සසම්භාවී ලෙස බෝල 3 ක් ඉවතට ගනු ලබයි.

(i) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගැනීමේ

(ii) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගත් බව දී ඇති විට A පෙට්ටිය තෝරාගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(b) $\bar{x}$ හා σ_x යනු පිළිවෙළින් $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ද $i = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = \dfrac{x_i - \alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි α හා $\beta\ (>0)$ තාත්ත්වික නියත වේ. $\bar{y} = \dfrac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$ හා $\sigma_y = \dfrac{\sigma_x}{\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

සමාගමක සේවකයින් 100 දෙනකුගේ රක්ෂණ සැලැස්මක් සඳහා මාසික වාරික පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියෙන් දෙනු ලැබේ.

මාසික වාරිකය (රුපියල්) x	සේවකයින් ගණන
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

$y = \dfrac{x - 500}{1000}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, y හි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ද, $\dfrac{3(\text{මධ්‍යන්‍යය} - \text{මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන y හි කුටිකතා සංගුණකය ද නිමානය කරන්න.

ඒ නයින්, x හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය නිමානය කරන්න.

* * *